Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

9η Εβδομάδα

Στη προηγούμενη διάλεξη αποδείξαμε το εξής θεώρημα

Θεώρημα 2.1. *Έστω ότι η $\bar{\varphi}(t)$ είναι μερική λύση του συστήματος*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{2.1}$$

και $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του (1.1). Τότε οποιαδήποτε λύση του συστήματος (2.1) μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) + \bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \tag{2.2}$$

με κατάλληλη επιλογή των σταθερών C_k.

Προφανώς το Θεώρημα αυτό μας λέει ότι ο τύπος (2.2) δίνει τη γενική λύση του συστήματος. Συνεπώς, όπως και στην περίπτωση μιας εξίσωσης, για να βρούμε την γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος (2.1), πρέπει να βρούμε μια μερική λύση του μη ομογενούς και να προσθέσουμε την γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς. Η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων που αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Για να βρούμε την μερική λύση, θα χρησιμοποιήσουμε την *μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών*. Έστω οι $\mathbf{x}^{[k]}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων του

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Θα ψάχνουμε την λύση του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \mathbf{x}^{[k]}(t). \tag{2.4}$$

Προφανώς

$$\frac{d\bar{\varphi}(t)}{dt} - \mathbf{A}(t)\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k' \mathbf{x}^{[k]} + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d\mathbf{x}^{[k]}}{dt} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A} c_k \mathbf{x}^{[k]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k' \mathbf{x}^{[k]} + \sum_{k=1}^{n} c_k [\frac{d\mathbf{x}^{[k]}}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{[k]}] = \sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \mathbf{x}^{[k]}(t).$$

Θέλουμε η $\bar{\varphi}$ να λύνει το μη ομογενές σύστημα δηλαδή θέλουμε

$$\frac{d\bar{\varphi}(t)}{dt} - \mathbf{A}(t)\bar{\varphi} = \mathbf{f}(t)$$

συνεπώς πρέπει

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \mathbf{x}^{[k]}(t) = \mathbf{f}(t)$$

ή ισοδύναμα

$$(2.5) \qquad \left(c_1', \cdots, c_n'\right) \begin{pmatrix} x_1^{[1]} & x_2^{[1]} & \cdots & x_n^{[1]} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{[n]} & x_2^{[n]} & \cdots & x_n^{[n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Άρα έχουμε να λύσουμε το σύστημα (2.5) ως προς $c_k'(t)$. Η ορίζουσα του πίνακα στο (2.5) διαφέρει από το μηδέν αφού ισούται με την Βρονσκιανή του θεμελιώδους συστήματος λύσεων. Θα θυμίσουμε ότι η αναστροφή του πίνακα δεν αλλάζει την ορίζουσα. Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε τις $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$ μονοσήμαντα:

$$\left(c_1', \cdots, c_n'\right) = \left(f_1, \cdots, f_n\right) \begin{pmatrix} x_1^{[1]} & x_2^{[1]} & \cdots & x_n^{[1]} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{[n]} & x_2^{[n]} & \cdots & x_n^{[n]} \end{pmatrix}^{-1}$$

Έστω

$$c_k'(t) = \psi_k(t),$$

τότε

$$c_k(t) = \int \psi_k(t) dt + \gamma_k,$$

όπου γ_k, $k = 1, \ldots, n$ είναι σταθερές. Αφού αρκεί να βρούμε μόνο μια μερική λύση, μπορούμε να θέσουμε $\gamma_k = 0$ για όλα τα k. Επομένως η μερική λύση θα γράφεται σαν

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int \psi_k(t) dt \, \mathbf{x}^{[k]}(t)$$

και για την γενική θα έχουμε

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{x}^{[k]}(t) + \sum_{k=1}^{n} \int \psi_k(t) dt \, \mathbf{x}^{[k]}(t)$$

όπου C_k- αυθαίρετες σταθερές.